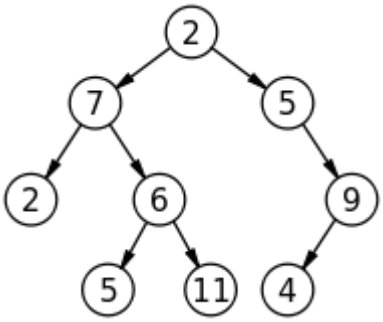
Algorytmy i złożoność obliczeniowa

Laboratorium 9: Drzewa BST.

Drzewa binarne – wprowadzenie.

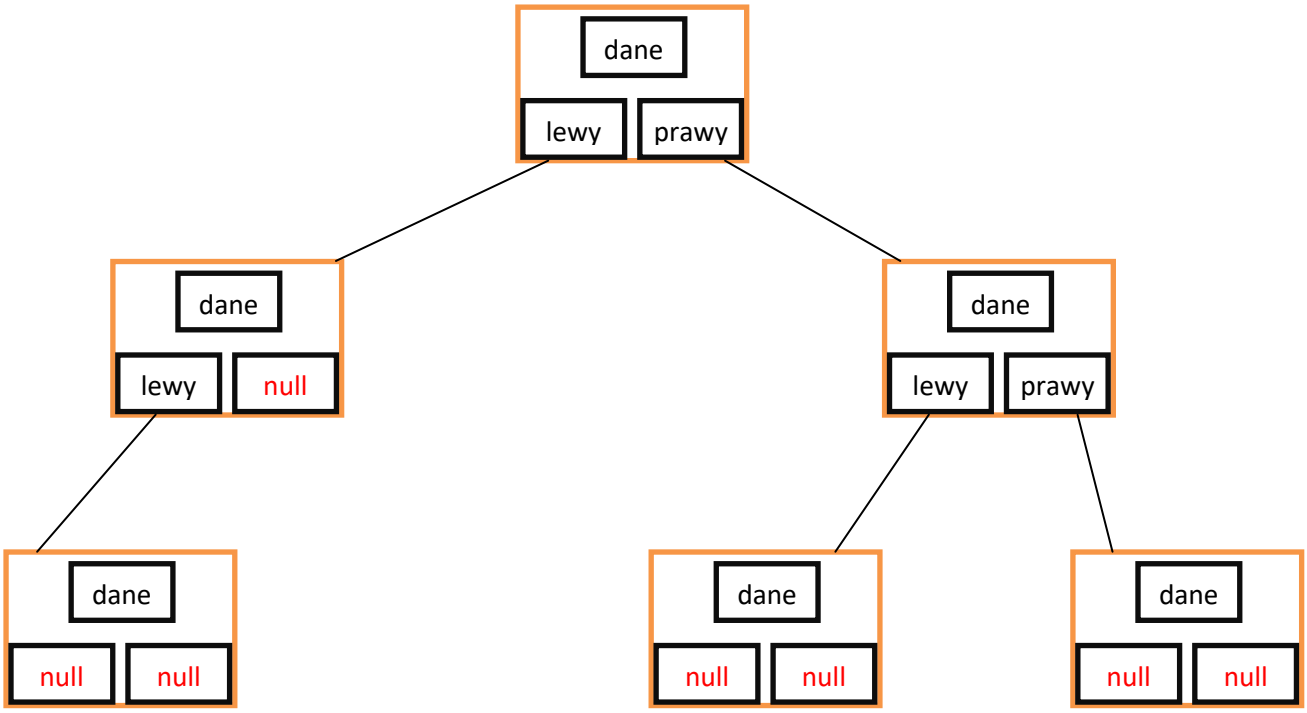


W informatyce drzewo binarne jest strukturą danych, w której każdy węzeł ma co najwyżej dwa węzły podrzędne, zwykle rozpoznawane jako "lewy" i "prawy".

Każdy węzeł w strukturze danych jest osiągalny z korzenia – wystarczy podążać za referencjami (lewy lub prawy) aby przechodzić coraz niżej w strukturze drzewa. Drzewa binarne są podstawą implementacji drzew BST (Binary Search Tree) oraz kopców binarnych.

1. **Implementacja drzewa binarnego.**

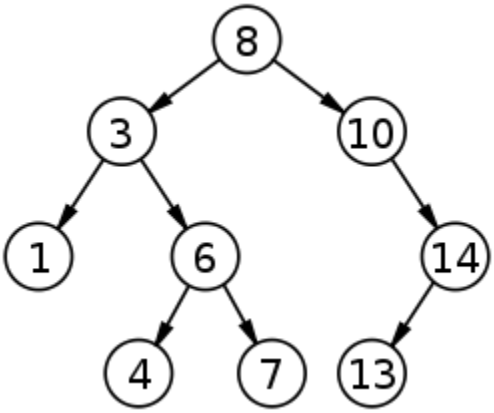
   Węzły drzewa są obiektami składającymi się z trzech komponentów: danych przechowywanych w węźle oraz dwóch referencji do węzłów potomnych: *prawy* i *lewy*. Na zewnątrz całe drzewo jest reprezentowane jako referencja do korzenia drzewa.



2. **Porządek w drzewach BST.**

   W drzewach BST węzły są uporządkowane.

   Wartości znajdujące się w lewym poddrzewie są nie większe niż wartość w węźle nadrzędnym, a z kolei wartości w prawym poddrzewie są większe, niż wartość w węźle nadrzędnym.



3. Iteracyjne wstawianie i wyszukiwanie węzła w drzewie

W celu budowania lub przeszukiwania drzewa BST wykorzystywane są często algorytmy rekurencyjne. Można jednak algorytmy te zapisać iteracyjnie przez „rozwinięcie“ rekursji w pętlę `while`. Często ta druga wersja jest nawet efektywniejsza.

Pseudokod: Iteracyjne wyszukiwanie węzła w drzewie. Funkcja zwraca parę węzłów: element szukany i jego poprzednika(rodzica).

```
function search(v : T; r: node, var y: node) : node;
 {T jest dowolnym typem liniowo uporządkowanym; r jest korzeniem drzewa
BST; y jest poprzednikiem wierzchołka wyszukiwanego przez search}
var x : node;
begin
    x := r; y:=nil;
    while (x < > nil) and (key(x) < > v) do begin
        y:=x;
        if v < key(x) then x := left(x) else x := right (x);
    end;
    search := x
end search;
```

Procedura `insert` najpierw sprawdza czy element nie istnieje w drzewie. Następnie tworzy nowy wierzchołek i wstawia tam element v. Następnie przeszukuje drzewo w celu znalezienia „odpowiedniego” miejsca do dowiązania wierzchołka x.

Pseudokod: Iteracyjne wstawianie węzła do drzewa BST.

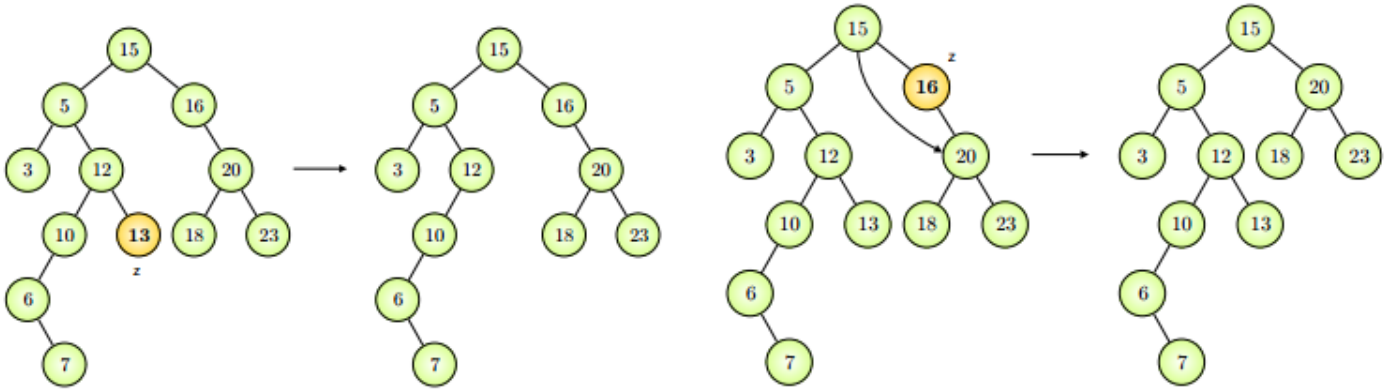
```
procedure insert (v : T; var r : node);
var x, y: node;
begin
     if search(v, r, y) = nil then
     begin
         new(x) ;
         left(x) := nil; key(x) := v; right(x) := nil;
         if y= nil then r := x else
           if v< key(y) then left(y) := x
                        else right(y) := x
     end
end insert;
```

4. Usuwanie węzła z drzewa BST

W algorytmie tym rozpatrywane są trzy przypadki.

1. Jeśli *z* nie ma synów, to w jego ojcu rodzic[z] zastępujemy wskaźnik do *z* wartością NULL, zobacz Rys. 1.

2. Jeśli węzeł ma tylko jednego syna, to usuwamy z przez ustalenie wskaźnika między jego ojcem a jedynym synem, zobacz Rys. 2.

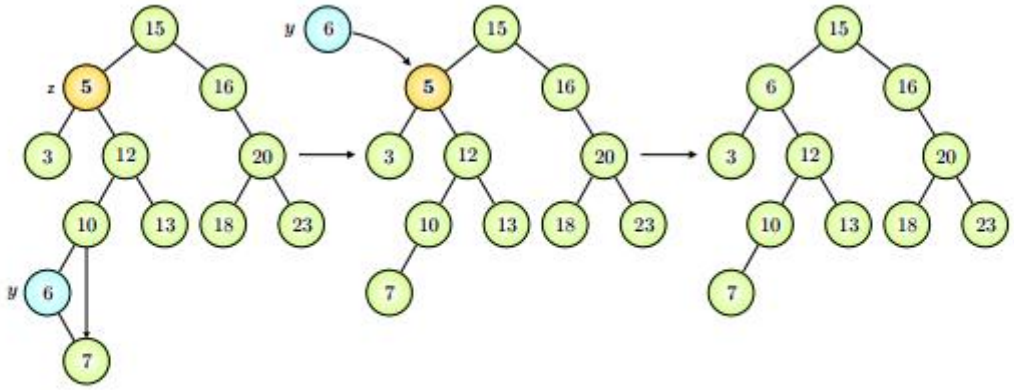


Rys. 1 Usuwanie węzła z z drzewa BST – przypadek 1. Rys. 2 : Usuwanie węzła z z drzewa BST – przypadek 2.

3. Jeśli węzeł ma dwóch synów, to w miejscu usuwanego węzła z wstawiamy:
   - **a.** następnik z w zbiorze wierzchołków (najmniejszy z elementów większych od z) patrz . Rys. 3
   - **b.** poprzednik z w zbiorze wierzchołków(czyli największy spośród wszystkich elementów mniejszych od z).

Czyli

(a) idziemy raz w prawo i do końca w lewo - Rys. 3 – wstawiamy 6
(b) idziemy raz w lewo i do końca w prawo – wstawiamy 3



Rys. 3 : Usuwanie węzła z z drzewa BST – przypadek 3.

Poniższy pseudokod przedstawia pewną wersję algorytmu USUN realizującą wszystkie trzy wyżej przedstawione przypadki.

```
Pseudokod : Usuwanie węzła z drzewa

procedure delete(v ; T; var r : node);
var x, y, z, t : node;
b: 0 .. 1;
begin
    x := search(v, r , y);
    if x < > nil then
     begin
      if (left(x) =nil) or (right(x) = nil) then
     begin
                if (left(x) =nil) and (right(x) =nil) then z :=nil
                else if left(x) = nil then z := right (x)
                                  else z := left(x);
          if y = nil then r := z else
                if x= left(y) then left(y) := z else right(y) := z
     end
         else
         begin {left(x) < > nil i right(x) < > nil}
         b := random(2);
//{jeśli b=0, to w miejsce v wstawiamy element bezpośrednio //poprzedzający
v w zbiorze S. Jeśli b = 1, to w miejsce v wstawiamy //element bezpośrednio
następujący po v w zbiorze S}


        if b = 0 then
        begin
             z := left(x) ;
             if right(z) = nil then left(x) := left(z)
           else
             begin
                repeat
                       t := z;
                       z := right(z)
                until right (z) = nil;
                right (t) := left (z)
             end
           end else
         begin
              z := right(x);
              if left(z) = nil then right(x) := right(z)
           else
              begin
                     repeat
                      t := z;
                      z := left(z)
                     until left (z) = nil;
                     left(t) : = right(z)
           end
   end;
  key(x) := key(z)
end end end delete;
```

5. Klasy potrzebne do rozwiązania zadań.

Dana jest klasa abstrakcyjna **BinaryTreeNode** oraz klasa **Pair**, które należy pobrać bezpośrednio ze strony WWW.

6. Zadania.

1. Utworzyć klasę dziedziczącą z klasy **BinaryTreeNode**. Zaimplementować rekurencyjnie metody ***print*** wypisującą drzewo oraz **addBSTRec** dodającą (rekurencyjnie) element do drzewa BST Napisać krótki program, który zaprezentuje działanie metod. **[2p]**

2. Zaimplementować rekurencyjnie metodę ***searchBSTRec*** realizującą przeszukiwanie drzewa BST w celu znalezienia określonej wartości. **[2p]**

3. Zaimplementować (iteracyjnie) metodę ***searchBST*** zwracającą węzeł zawierający poszukiwaną wartość oraz jego poprzednika. **[2p]**

4. Zaimplementować (iteracyjnie) metodę ***insertBST***, która korzystając z *searchBST* wstawia nowy węzeł do drzewa BST. **[2p]**

5. Zaimplementuj **usuwanie** elementów z drzewa BST z zachowaniem porządku. **[4p]**

Praca domowa:

Zaimplementować klasę generyczną *BST<T extends Comparable>* jako drzewo BST przechowujące elementy typu T.