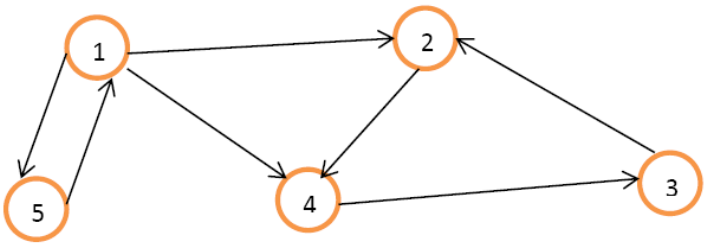
Algorytmy i złożoność obliczeniowa.

Przygotowanie do Laboratorium 6 i 7: Grafy. Przeszukiwanie grafów.

1. **Grafy – wprowadzenie.**

Graf jest strukturą składającą się ze zbioru wierzchołków (węzłów) i zbioru krawędzi łączących wierzchołki ze sobą. Zbiór wierzchołków będziemy oznaczać przez V (od ang. vertex), a zbiór krawędzi przez E (ang. edge). Najbardziej intuicyjną reprezentacją grafu jest reprezentacja graficzna. Węzły reprezentowane są najczęściej jako koła, natomiast krawędzie jako linie (w grafach nieskierowanych) lub strzałki (w grafach skierowanych) łączące ze sobą węzły. Poniższy rysunek przedstawia graf skierowany składający się z 5 wierzchołków i 7 krawędzi:



Ten graf jest wyznaczony przez zbiór wierzchołków **V={1, 2, 3, 4, 5}** oraz następujący zbiór krawędzi: **E={ (1, 5), (5, 1), (1, 4), (1, 2), (2, 4), (4,3), (3, 2) }**. Zwróćmy uwagę, że krawędź jest wyznaczona przez parę wierzchołków, a zbiór krawędzi to zbiór par wierzchołków. Formalnie E jest podzbiorem produktu kartezjańskiego V x V.

2. **Macierzowa reprezentacja grafu.**

Reprezentacja graficzna jest intuicyjna i czytelna dla człowieka (zwłaszcza dla grafów o niewielkich rozmiarach), ale nie nadaje się do automatycznego przetwarzania przez programy komputerowe. Jedną z reprezentacji grafów ułatwiającą przetwarzanie grafów przez algorytmy jest macierz sąsiedztwa.

Macierz sąsiedztwa to macierz kwadratowa o rozmiarze równym liczbie wierzchołków grafu. Wiersze i kolumny macierzy są etykietowane kolejnymi wierzchołkami grafu. Element $\mathbf{a_{ij}}$ macierzy zawiera informację o krawędzi (lub jej braku) pomiędzy wierzchołkiem **i** a wierzchołkiem **j**. W najprostszym przypadku (dla grafów nieetykietowanych) możemy przyjąć, że jeśli wierzchołki **i** oraz **j** są połączone krawędzią, to $\mathbf{a_{ij}} = 1$. Jeśli taka krawędź nie istnieje, to $\mathbf{a_{ij}} = 0$. Poniżej macierz sąsiedztwa dla grafu przedstawionego na rysunku:

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	1
2	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0
5	1	0	0	0	0

3. **Przeszukiwanie grafu wszerz (Breadth-First Search, BFS), wersja podstawowa.**

Algorytm przeszukiwania grafu wszerz rozpoczyna działanie od wyznaczonego wierzchołka s. Wierzchołek ten jest oznaczany jako odwiedzony, żeby zapobiec powtórnemu przetwarzaniu tego wierzchołka przez algorytm, a następnie dodawany do listy Q. Na tej liście znajdują się wierzchołki, które będą odwiedzone w kolejnych krokach algorytmu. W danym kroku algorytmu pobierany jest pierwszy wierzchołek z listy Q, oznaczony przez v. Następnie odwiedzane są wszystkie wierzchołki sąsiadujące z wybranym wierzchołkiem v, które nie są jeszcze oznaczone jako odwiedzone (odwiedzenie wierzchołka polega na oznaczeniu go jako odwiedzonego oraz dodaniu go na koniec listy Q). Następnie wierzchołek v zostaje oznaczony jako przeszukany (gdy wszyscy sąsiedzi v są już odwiedzeni. Algorytm kończy działanie, gdy lista Q jest pusta.

4. Przeszukiwanie grafu w głąb (Depth-first search, DFS), wersja podstawowa.

Idea algorytmu DFS jest bardzo prosta – sięgamy w grafie „głębiej" o ile jest to możliwe. Najpierw wybieramy wierzchołek, z którego rozpoczniemy przeszukiwanie (nazwijmy go wierzchołkiem startowym). Następnie przechodzimy z wybranego wierzchołka do któregokolwiek z jego sąsiadów, który nie został jeszcze odwiedzony. Powtarzamy powyższy krok do momentu, gdy wszyscy sąsiedzi wierzchołka v, w którym się aktualnie znajdujemy, zostali już odwiedzeni. Cofamy się wtedy do wierzchołka, z którego doszliśmy do v i szukamy innego nieodwiedzonego jeszcze wierzchołka. Proces ten jest kontynuowany do momentu, kiedy odwiedziliśmy wszystkie wierzchołki osiągalne z wierzchołka startowego. Po wykonaniu jednego takiego przejścia, jeśli w grafie pozostały jeszcze jakieś wierzchołki nieodwiedzone, to znów wybieramy wierzchołek startowy i przeszukujemy dalej. W przeciwnym wypadku kończymy działanie algorytmu, gdyż wszystkie wierzchołki zostały już odwiedzone.

```
PSEUDOKOD
funkcja odwiedzaj(u):
        kolor[u] = SZARY
        czas = czas + 1
        poczatek[u] = czas
        dla każdego wierzchołka v na liście sąsiedztwa u:
            jeżeli v jest biały:
                rodzic[v] = u
                odwiedzaj(v)
        kolor[u] = CZARNY
        czas = czas + 1
        koniec[u] = czas

    funkcja DFS(Graf G):
        dla każdego wierzchołka u z grafu G:
            kolor[u] = BIAŁY
            poczatek[u] = koniec[u] = 0
            rodzic[u] = NIL
        czas = 0
        dla każdego wierzchołka u z grafu G:
            jeżeli u jest biały:
                odwiedzaj(u)
```

Zadania.

1. Zaimplementować klasę reprezentującą graf. Zaimplementować metodę dodającą krawędź do grafu, metodę wypisującą graf jako macierz oraz wypisującą graf jako listę sąsiedztwa.
2. Zaimplementować przeszukiwanie grafu wszerz (BFS). Wypisać kolejno odwiedzane wierzchołki.
3. Zaimplementować rekurencyjne przeszukiwanie grafu metodą DFS (w głąb). Wypisać kolejno odwiedzane wierzchołki.
4. Zaimplementować znajdowanie silnie spójnych składowych grafu.